Kompetenz in Mathematik

Bildungsstandards, Reifeprüfung, Unterrichtsprojekte und PISA-2012

Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Impressum

Herausgeber:
Arbeitsgemeinschaft moderner Mathematikunterricht

Redaktion:
Hans-Stefan Siller, Christian Dorninger

Design und Layout:
Eveline Merzeder

Druck:
BMUKK- Eigendruck, Wien 2011.

Die Initiative

Zum aktuellen Kompetenzbegriff wird in der modernen Pädagogik ab der Jahrtausendwende umfangreich publiziert. Viele wichtige Veröffentlichungen wie die von Anderson & Krathwohl (2001), von Klieme (2003) oder Weinert (2001) stammen aus dieser Zeit und zeigen damit den Paradigmenwechsel an, nicht nur „inputorientiert“ zu unterrichten, sondern Kinder und Jugendliche beim Aufbau ihrer Kompetenzen zu begleiten. Diese neue Sichtweise zeigt sich in Österreich am Beispiel der Bildungsstandards aus Mathematik, der neuen Formate im Rahmen standardisierter Reifeprüfungsarbeiten in (angewandter) Mathematik und bei der nun bereits längeren Erfahrung mit fachdidaktischen Unterrichtsprojekten, wie vom „IMST“ – Projektbereich („Innovationen Machen Schulen Top“) in besonderer Weise seit 2000 unterstützt.

Ein besonderes Anliegen der vorliegenden Initiative ist es, den österreichischen Schüler/innen Hinweise und Anstöße zu geben, bei der im April und Mai 2012 stattfinden PISA - Testung besser als bisher abschneiden zu können. Die PISA- Leistungen aus Mathematik waren bisher allesamt durchschnittlich und sollten sich auf jeden Fall verbessern. Eine Unterstützung durch eine Online-Plattform, durch Vorträge bekannter österreichischer Mathematiker/innen und Didaktiker/innen sowie diese Broschüre sollen dazu beitragen, sich der Wichtigkeit der Erbringung von guten Leistungen auch außerhalb der klassischen Formen der Leistungsfeststellung in Österreich bewusst zu werden. Dabei werden die nachfolgend aufgelisteten Ziele verfolgt:

1) Internationale Testformate in Mathematik bei den Lehrenden und damit auch im Unterricht bekannt zu machen („Prüfungskultur“);

2) Aufgabenstellungen für den Mathematikunterricht sollen zukünftig von Lehrenden in der Form entwickelt werden, dass der Mehrwert der Mathematik an der Schnittstelle zwischen der Sekundarstufe I und II deutlich wird;

3) Ein Klima der Ernsthaftigkeit und Leistungsfreude erzeugen, mit dem internationale Tests bewältigt werden können.

Die Broschüre richtet sich an Lehrende der Mathematik und versucht, in komprimierter Form einen Überblick über Formen der Überprüfung mathematischer Kompetenz zu geben. Die überblicksmäßige Zusammenschau von Bildungsstandards, Reifeprüfungsaufgaben und Aufgaben internationaler Assessments bietet auch die Möglichkeit, Vergleiche mathematischer Kompetenzen über die unterschiedlichen Bildungsstufen hinweg anzustellen. Beim intensiven Studium wünschen die Proponenten dieser Initiative, etwas Spaß, interessante Stunden und gutes Gelingen für die Umsetzung in ihren Unterricht.

Der Direktion und Zentrumsleitung des BIFIE – WIEN wird herzlichst für die Überlassung der Mathematik – Aufgaben in allen Kompetenzbereichen gedankt.

Das Proponententeam der Initiative „PISA –Math -2012 (Namen der Teilnehmer/innen vom 25.2. 2012).

Inhaltsverzeichnis

A. Zum Kompetenzbegriff — Seite 7

B. Mathematik – Bildungsstandards — Seite 13

C. Reifeprüfung aus (angewandter) Mathematik — Seite 17

D. Unterrichtsprojekte — Seite 23

E. Kann Österreich bei PISA-Mathematik erfolgreicher werden? — Seite 27

F. Das PISA- Framework – Rahmenbedingungen für die Testungen — Seite 33

G. Wie sieht das Aufgabenformat bei PISA-Aufgaben aus — Seite 41

H. Die Aufgaben zur Mathematik bei den PISA-Haupttests — Seite 47

I. Informationen über die Durchführung — Seite 61

J. Lösungs- und Korrekturvorschläge zu den Beispielen im Text — Seite 63

K. Literatur — Seite 69

A. Zum Kompetenzbegriff

Der Begriff **„Kompetenz“** entwickelte sich in den 80-er Jahren aus der „Schlüsselqualifikationsdebatte“, ist aber inzwischen im gesamten schulischen Bereich fest verankert. Er wird zunehmend als Grundlage für die Neugestaltung der gesamten Bildungslandschaft angesehen. Der Ansatz des kompetenzbasierten Lernens zeichnet sich in beinahe allen europäischen Ländern als Trend in der Berufsbildung ab, da hier der Übergang von der Schule in den Beruf mit geringeren Problemen behaftet ist.

Beinahe alle Fachpublikationen lehnen sich an die Definition von Franz Weinert (2001) an, der „Kompetenzen als kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten“ versteht, „um gewisse Probleme zu lösen und die damit verbundenen motivationalen, volationalen (= Umsetzung von Zielen und Motiven durch Handlungen) und sozialen Bereitschaft und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“. Die Definition von Weinert klingt beim ersten Lesen wie die Rache der Bildungswissenschaftler an den Schulpraktikern. Daher kürzer: „Bildungsprozesse zielen nach übereinstimmender Einschätzung auf den Erwerb von Kenntnissen, Fähig- und Fertigkeiten und Einstellungen ab. Nichts anderes meint die pädagogischen Diskussion der letzten 30 Jahre mit dem Begriff Kompetenz“ (vgl. Zeiner, 2008).

Mit dem Begriff „Kompetenzen“, so Klieme (2003) im ausführlichen Gutachten für die Entwicklung nationaler Bildungsstandards in Deutschland „ist ausgedrückt, dass anders als bei Lehrplänen nicht auf Listen von Lehrstoff und Lerninhalte zurückgegriffen wird, um Bildungsziele zu konkretisieren. Vielmehr geht es darum, Grunddimensionen der Lernentwicklung in einem Gegenstands-Bereich (einer Wissensdomäne) zu identifizieren. Kompetenzen spiegeln die grundlegenden Handlungsanforderungen, denen Schüler/innen ausgesetzt sind.“

Kompetenzen werden somit als Maßstab für den Erfolg von Lernprozessen gesehen. Die Erreichung dieser Ziele erfordert zunächst ein verändertes Rollenverständnis, das den Lernenden mehr Aktivität, Selbststeuerung und Eigenverantwortlichkeit im Lernprozess einräumt und den Lehrenden vorrangig unterstützende Funktionen beim Lernprozess zuweist. Zur Förderung des Kompetenzaufbaus können unterschiedliche Lernprinzipien empfohlen werden, die vor allem sinnstiftende Fragestellungen wie guter Lernkontext, optimale Lerngelegenheiten, Vielfalt der Lernorte, elektronisch unterstützte „Learning environments" und praktische Arbeiten in den Vordergrund rücken.

Verkürzt könnte man sagen, dass nicht Niveau und Qualität des Lehrstoffes und der Lehrstoffvermittlung allein im Mittelpunkt des Interesses stehen, sondern die anwachsenden Kompetenzen bei den Schüler/innen, die durch Begleitung durch die Lehrenden in entsprechend nachhaltiger Form erworben werden..

Ein Beispiel:
Die Schüler einer zweiten HTL – Klasse wurden nach Vorstellung des Kompetenzmodells gebeten, Vorschläge für eine Jahreslehrstoffbereitung in „angewandter Informatik" zu machen. Der Gegenstand eignet sich gut, da hier bereits Vorkenntnisse aus den Vorgängerschulen vorhanden sind und die Inhalte in der einen oder andern Form bekannt sind.
Sie interpretierten die Aufgabe so, dass sie vorschlugen, zuerst die Werkzeuge kennen zu lernen, die sie zu ihrer persönlichen Darstellungs- und Ausdrucksfähigkeit nützen können (Textverarbeitung, Graphik-und Präsentationssoftware, Webseitengestaltung). Erst dann sollte „Theoriestoff" (Informatiksysteme, Betriebssysteme) durchgenommen werden, der dann mit den bereits bekannten Werkzeugen besser bearbeitet werden kann. Dieser Vorschlag war ein voller Erfolg und führte auch zu höherer Motivation, da er von den Schülern selbst kam. Natürlich wurden in der Folge die unbeliebten Wissenstests größtenteils durch persönliche Ausarbeitungen und Präsentationen ersetzt!

Die so definierten Kompetenzen folgen meist folgender Unterteilung:

- Fachkompetenzen (fachbezogenes deklaratives Wissen und dessen Umsetzung)
- Methodenkompetenzen (prozedurales Wissen)
- Sozialkompetenzen (Fähigkeiten zur sozialen Interaktion, zu Kooperation und Kommunikation)
- Personale Kompetenzen (Fähigkeit zur Steuerung des eigenen Handelns).

Wesentliche Charakteristika des kompetenzbasiertes Unterrichtens sind das **Arbeiten nach einem zwei – oder mehrdimensionalen Kompetenzmodell**, in dem die Handlungsdimension wie Verstehen, Anwenden, Analysieren oder Entwickeln dieselbe Relevanz hat wie die Inhaltsdimension (=der Aufbau des Lehrstoffs), die **Kumulativität** (d.h. der Aufbau der Kompetenzen über die Schuljahre hinweg; führt zu einer Verminderung der „Packungsdichte" des Lehrstoffes, aber zu vielen Maßnahmen um z.B. den Lernstoff aus unterschiedlichen Blickwinkeln zu begleiten und damit „nachhaltig" zu machen; beispielsweise durch Änderung der Lernorte oder Lehrer-Schüler-Interaktion mit verschiedenen Lehrenden) und die **Prozesszentriertheit** (der/die Schüler/in und dessen/deren Kompetenzzuwächse stehen im Mittelpunkt).

Dies bedingt mehr Verantwortung der Schüler/innen im Lernprozess, mehr Mitbestimmung der Schüler/innen über Lehrinhalte und die Art der Vermittlung, langsamen, aber nachhaltigen Lernfortschritt mit vielen „Lernspiralen" („alter" Lernstoff wird ausgebaut, vertieft, ergänzt) zu organisieren. Auf den Lernstoff bezogen, könnte man sagen „Weniger (Lernstoff) ist mehr (da von unterschiedlichen Seiten beleuchtet). Nicht das serielle Abarbeiten von Lehrstoff steht im Mittelpunkt, sondern der Aufbau von Vernetzungen und Zusammenhängen, die den Lernenden von mehreren Seiten bewusst werden".

Ein Beispiel aus der Mathematik:
Mit der Einführung moderner Taschenrechner sind operative Methoden wie „Wurzelziehen“ oder „logarithmisches Rechnen“ schon vor Jahren obsolet geworden. Man bekommt sofort – ohne Einschränkung der allgemeinen mathematischen Verständlichkeit – ein Ergebnis, da das ganz spezifische Know-How zum „Wurzelziehen“ oder „logarithmischen Rechnen“ sich offenbar überlebt hat und auch für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge nicht mehr in dem Maße notwendig ist. Buchberger und Heugl (1989) nannten diese Entwicklung „Black box - White Box“ – Ansatz, d.h. man muss akzeptieren, dass im „Black-Box-Bereich“ gewisse Arbeitsmethoden zu gewünschten Ergebnissen führen, ohne dass man diese Methoden sofort vollkommen verstehen kann. Erst in einer höheren Stufe wird diese meist verallgemeinerte Methode interessant und bringt auch Erkenntnisse und Anwendungen über die spezifische Aufgabenstellung hinaus (z.B. Rechenregeln für Logarithmen nach Napier u.a.).

Zielgruppenbezogenes Lernen heißt „Black Box“ - Lernen anzubieten und nicht alle Einzelschritte in einem Lernprozess zu hinterfragen. Man vertraut darauf, dass diese Boxen später „transparent“ gemacht werden. Wichtig beim Lernprozess ist aber auch, diese „schwarzen Bereiche“ zumindest eine Zeit lang als „nicht erklärt, sondern nur verwendet“ akzeptieren zu können. Die immer wieder gemachte Erfahrung, dass Lernende bei Lernschritten hängen bleiben und nicht weiter kommen, da sie diese Details nicht verstanden haben, und damit ihren gesamten Lernprozess in Frage stellen, muss bei der Arbeit überwunden werden. Damit kann man das „Spiralprinzip des Lernens“ auch so verstehen, dass man nach inzwischen angesammelter Erfahrung im Fachgebiet wieder zu den unverstandenen „schwarzen Boxen“ zurückkehrt, um sie beim zweiten oder dritten Anlauf erhellen zu können.

Ähnliche Erfahrungen, die mit praktischer Sprachpraxis verbunden sind, dominieren die didaktischen Überlegungen beim fremdsprachlichen Lernen.

Zum Kompetenzbegriff

Welche Kriterien gelten nun für die Umsetzung eines kompetenzorientierten Unterrichts:

- Es geht darum, im Unterricht die Klarheit über Lernziele herzustellen.
- Die Methodenvielfalt der Lern- und Arbeitsformen wie selbstgesteuertes Lernen, Gruppenarbeiten, Produktivität im Unterricht und Verwendung zeitgemäßer Informationstechnologien verbreitet sich rasch.
- Lernen wird deutlicher kontextbezogen – Schüler/innen sind dann motiviert, wenn sie sich mit persönlich bedeutungsvollen Lernaufgaben beschäftigen.
- Realbegegnungen in Betrieben und lebenspraktischen Kontexten sind einzubeziehen.
- Lernstoff sollte gegenstandsübergreifend, aber auch vertikal vernetzt werden.
- Lernen und Arbeiten sollte in verschiedenen Kontexten reflektiert werden.
- Produkte des Lernens und Arbeitens sollen weiter verwendet werden; Lehrende müssen inhaltliches Interesse an den Arbeiten ihrer Schüler/innen haben (und zeigen!).

B. Mathematik - Bildungsstandards

Die Bildungsstandards legen fest, welche Kenntnisse und Kompetenzen Schüler/innen in der 4. und 8. Schulstufe in Mathematik haben sollen. Die Überprüfung dieser Standards sichert die Qualität im Unterricht und setzt für schulisches Lernen klare Kompetenzziele. Die gesetzliche Grundlage sind um §17 Absatz 1a des Schulunterrichtsgesetzes zu finden, der ausschnittsweise lautet:

„Bildungsstandards sind konkret formulierte Lernergebnisse, die sich gemäß dem Lehrplan der jeweiligen Schulart auf einzelne Pflichtgegenstände oder auf mehrere in fachlichem Zusammenhang stehende Pflichtgegenstände beziehen. Die individuellen Lernergebnisse zeigen das Ausmaß des Erreichens grundlegender, nachhaltig erworbener Kompetenzen auf. Der Lehrer hat bei der Planung und Gestaltung der Unterrichtsarbeit die Kompetenzen und die darauf bezogenen Bildungsstandards zu berücksichtigen (..). Es ist vorzusehen, dass die Ergebnisse von Standardüberprüfungen so auszuwerten und rückzumelden sind, dass sie für die langfristige systematische Qualitätsentwicklung in den Schulen nutzbringend verwertet werden können“.

Die Ergebnisse erlauben Aussagen über die Unterrichtsleistung und über die Kompetenzen der Schüler/innen. Die Standards sind eine Orientierung für Lehrkräfte in Richtung eines „outputorientierten“ Unterrichts. Sie helfen den Schülern bei der Selbstevaluation und dienen durch eine Qualitätskreislauf der Weiterentwicklung der Unterrichtsqualität.
Im Schuljahr 2008/09 wurde für die 8. Schulstufe einen sogenannte „Baseline“ – Testung mit der Erhebung des Istzustandes in Mathematik, Deutsch und Englisch erhoben. Für die 4. Schulstufe fand diese Testung im Schuljahr 2008/10 statt. Die ersten systematischen Überprüfungen für alle Schüler/innen sind ab 2012/13 vorgesehen.
Bildungsstandards sollen vor allem durch konkrete Vergleichsmaßstäbe die bestmögliche Diagnostik als Grundlage für eine individuelle Förderung sicherstellen und damit wesentlich zur Qualitätssicherung an den Schulen beitragen.

Die Bildungsstandards werden in Zukunft in Form von schriftlichen Tests überprüft. Dabei wird festgehalten, ob die Schüler/innen das vermittelte Wissen auch anwenden können. Die Auswertung der Fragebögen wird vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Bildungswessen (BIFIE) durchgeführt.

Dabei erhalten die Lehrenden, die Lehrer/innen, die Schulleiter/innen und die Schulaufsicht Rückmeldungen über die Ergebnisse, wobei auf Anonymisierung und eine Zusammenfassung dieser Ergebnisse („Aggregiertes Ergebnis") geachtet wird. Die Ergebnisse haben daher mit der Leistungsbeurteilung der Schüler/innen nichts zu tun.

Durch einen dreijährigen Überprüfungszyklus haben die Schulen die Möglichkeit, Maßnahmen zur Qualitätsentwicklung zu setzen, wenn die Ergebnisse nicht den gewünschten Standard erreichen. An 2014/15 können dann auch auf allen Ebenen (Schule- Bundesland – Österreich) Veränderungsanalysen durchgeführt werden.

Welche Kompetenzen aus Mathematik werden also überprüft?

B.1. Für die **4. Schulstufe** gilt:
1. Inhaltlich: Arbeiten mit Zahlen, mit Rechenoperationen, mit Größen und mit Ebene und Raum.
2. Allgemein: Modellieren von einfachen mathematischen Sachverhalten, Operieren, Kommunizieren (Reden über mathematische Sachverhalte) und Problemlösen.

Sehen wir uns dazu einige typische Aufgaben an
(siehe BIFIE – Homepage www.bifie.at – Lösung Seite 60):
1. Welche Ziffer steht an der Hunderterstelle? Zahl: 23453
2. Nenne mir eine Zahl zwischen 11 und 20. Die zwei Ziffern müssen zusammengezählt 7 ergeben.
3. Ein Tisch und ein Sessel kosten zusammen 700 €. Zwei Sessel kosten zusammen 400 €. Wie viel kostet der Tisch?

4. Lisi dividiert die Zahl 7, 10 und 16 durch 3. Die drei Rechnungen haben etwas Gemeinsames – was ist es?
5. Sandra hat die Rechnung 84*5 = 420 ganz schlau im Kopf gerechnet. Hier siehst Du, wie Sandra gedacht hat: 84 € 840 € 420. Wie hat Sandra gerechnet?
6. Eine Rechenregel lautet: „Dividiere die erste Zahl durch 6, um die zweite Zahl zu erhalten!" Wo wurde sie richtig angewandt?
   a) 18 → 3; b) 42 → 6; c) 60 → 20; d) 20 → 4; e) 54 → 9 .
   Schau dir die Aufgabe an und nenne die Rechnungen, wo die Regel richtig angewandt wurde!

B.2. **Für die 8. Schulstufe** gilt:
1. Inhaltsbereiche: Zahlen und Maße; Variable, funktionale Abhängigkeiten; geometrische Figuren und Körper; Statistische Darstellungen und Kenngrößen.
2. Handlungsbereiche: Darstellen und Modellieren; Rechnen und Operieren; Interpretieren; Argumentieren und Begründen.

Sehen wir uns dazu auch einige typische Aufgaben an
(siehe BIFIE – Homepage www.bifie.at – Lösung Seite 60):
1. Ein Badezimmer hat eine Bodenfläche von 7,2 m2. Eine Packung Fliesen reicht für 1,2 m2. Wie viele Packungen Fliesen benötigt man mindestens zum Verfliesen des Bodens?
2. Die Einwohnerzahl folgender Gemeinden sollen mit einem Balkendiagramm dargestellt werden. Der längste Balken soll eine Länge von 6 cm haben. Welcher Einwohnerzahl entspricht die Balkenlänge von 1 cm ?

Gemeinde	Einwohnerzahl
Bruckhausen	15 000
Korbach	18 000
Einsfeld	14 000

3. Alina und Christoph wollen eine fünftägige Fahrt mit dem Paddelboot machen. Sie planen pro Tag durchschnittlich 15 km zu schaffen. Nach vier Tagen haben sie folgende Strecken zurückgelegt:

Tag	1	2	3	4	5
Kilometer	17	12	14	16	?

Wie viele Kilometer müssen sie am 5. Tag zurücklegen, um einen Durchschnitt von 15 Kilometern pro Tag zu erreichen?

4. In einer Schule sind die Buben deutlich in der Minderheit. In jeder einzelnen Klasse gilt: **2 * B < M**. (B.. Anzahl der Buben, M.. Anzahl der Mädchen).
In einer der Klassen sind 17 Mädchen. Wie viele Buben sind dann höchstens in dieser Klasse?
5. Eine der unten angeführten Gleichungen lässt sich aus folgender Darstellung ableiten:

```
|-----------------------------------------------------| d

|-----------|------------|---------------------------|
      a            a                  c
```

Welche zugehörige Gleichung ist die richtige (bitte, Zahl nennen)?
1) c - a = d - a; 2) d - c = a; 3) a + c = d; 4) c + a = d - a; 5) d – c : 2 = a; 6) d – a = c

In Summe erscheint es ganz wesentlich, die Anforderungen an die Bildungsstandards in der 4. und 8. Schulstufe deutlich vom PISA- Framework, wie es in Kapitel 6 dargestellt ist, abzusetzen. Die großen Unterschiede im Ansatz – Bildungsstandards sehen Vergleichsmaßstäbe für die individuelle Förderung vor, das PISA – Framework hat den Anspruch, die funktionelle Anwendung mathematischen Wissens in unterschiedlichsten Situationen zu überprüfen – machen die beiden Projekte „Bildungsstandards“ und PISA-Testungen auch nicht vergleichbar!

C. Reifeprüfung aus (angewandter) Mathematik

Bis 2014/15 soll die Reife- und Diplomprüfung an allen höheren Schulen mit einer Abschlussarbeit, standardisierten allgemeinbildenden Klausuren, Fachklausuren und nicht standardisierten mündlichen Prüfungen umgesetzt werden. Die Entwicklung von standardisierten schriftlichen Aufgaben erfolgt in Zusammenarbeit mit dem BIFIE – Wien. Lehrende des jeweiligen Schultyps werden diese Aufgaben entwickeln, die getestet und zudem noch auf ihre schultypenspezifische Relevanz hin überprüft werden.

Als Intention für eine Zentralisierung der schriftlichen Reife- und Diplomprüfung werden eine „stärkere Objektivierung“ der Klausuren sowie eine „bessere Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse“ im Regierungsprogramm genannt. Die Chance der neuen zentral vorgegebenen Reife- und Diplomprüfung ist es, eine valide Qualitätssicherung zu gewährleisten, die Beurteilung der Klausuren zu objektivieren und somit eine nationale und internationale Vergleichbarkeit zu ermöglichen. Es lässt sich nicht verleugnen, dass die derzeit gängige Praxis der Reife- und Diplomprüfung auf die Lehrpersonen und die Klassensituation zugeschnitten ist und die Arbeiten auch unterschiedlich bewertet werden, sodass weder eine Vergleichbarkeit des Niveaus der Aufgabenstellungen noch eine Objektivität der Beurteilung gegeben sind. Dies stellt jedenfalls eine Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung für die AHS und BHS in gleicher Weise dar.

Die Aufgabenkultur kann eine tiefere Verständigungsbasis über „Anspruchsniveaus“ entwickeln als es bisherige Gespräche über Lehrinhalte der derzeitigen Lehrpläne je tun konnten. Aufgabenbeispiele müssen bezüglich der Einführungstexte, der Festlegung der Kompetenzniveaus, des exemplarischen Charakters und der Abstimmung von schriftlichen, graphischen und praktischen Subaufgaben gut abgestimmt werden. Über passende Aufgaben muss genau so eine entsprechende Einigung erzielt werden, wie über Stichworte hinsichtlich Lehr- und Lerninhalten. Daher werden bereits zu Diskussionszwecken prototypische Beispiele vorhanden sein, um einen Konsens über die Darstellung von Inhalten und Ausformulierung von (Begleit-)Texten auf der Basis der geltenden Kompetenzmodelle erreichen zu können.

„Mathematik“ oder **„Angewandte Mathematik“** als standardisiertes Klausurprüfungsfach an AHS, BHS und Bildungsanstalten wird ebenfalls in standardisierter Form vorbereitet. Es soll dabei eine Balance zwischen mathematischen Kalkülen, die Verständnis für Zusammenhänge generieren (Lineare Algebra, Folgen/ Reihen/Grenzwerte, Wahrscheinlichkeitsbegriff, Nomenklatur) und Mathematik in unterschiedlichen Anwendungs- und Kommunikationsbezügen gefunden werden. Die Nutzung elektronischer Werkzeuge, mathematischer Software und entsprechender (Mathematik-)Portale ist im Unterricht Standard und soll auch Einsatz finden (Ausnahmen wird es nur in der Anlaufphase oder in sehr begründeten Fällen geben). Dabei ist zu beachten, dass die Erklärung der mathematischen Zusammenhänge nicht zu kurz kommt.

Die Aufgaben für die Reifeprüfung bzw. Reife- und Diplomprüfungen werden im nächsten Jahr am BIFIE - Wien intensiv (weiter-)entwickelt und getestet. Einige dieser Aufgaben sind – neben unterstützendem Unterrichtsmaterial –auf der Homepage www.bifie.at unter Reifeprüfung zu finden. Fünf typische für den Unterrichtseinsatz gedachte Aufgaben (für die BHS) seien hier exemplarisch angeführt.

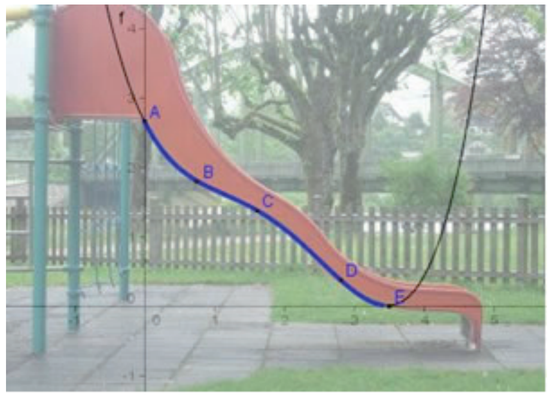
Aufgabe 1: Stromrechnung
Ein Energieversorger bietet Kunden folgenden Tarif für Haushaltsstrom an.
Information zu Ihrem Energieprodukt
Preisübersicht Optima Float April 2010

Produkt	Preiskomponente	Einheit	Betrag
Optima Float	Energieverbrauchspreis	ct / kWh*	8,3399
Grundpreis	Euro/Monat	3,00	Preise inkl. 20 % USt.

* in Cent pro verbrauchter Kilowattstunde

a) Familie Kraner verbrauchte im Monat September 1.020 kWh. Wie viel hätte sie mit diesem Tarif zu bezahlen?
b) Stelle eine Formel zur Berechnung des monatlichen Energiegesamtpreises (Energieverbrauchpreis plus Grundpreis) auf und erkläre die von dir verwendeten Variablen.
c) Besteht zwischen dem Verbrauch an kWh und dem monatlichen Energiegesamtpreis ein linearer Zusammenhang? Begründe deine Antwort.
d) Besteht zwischen dem Verbrauch an kWh und dem Energiegesamtpreis (jeweils für ein Monat gerechnet) ein direktes Verhältnis? Begründe deine Antwort.
e) Besteht zwischen dem Verbrauch an kWh und dem Preis für diese kWh (exklusive Grundpreis) ein direktes Verhältnis? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2: Kinderrutsche
Eine Kinderrutsche kann im Modell durch die Polynomfunktion f mit $f(x) = 0{,}09x4 - 0{,}68x3 + 1{,}6x2 - 2{,}01x + 2{,}66$ im Intervall [0; 3,5] beschrieben werden.



a) Ist das Gefälle (negative Steigung) bei x = 0 oder bei x = 3,5 größer?
b) An welcher Stelle des Intervalls [0; 3,5] besitzt die Rutsche das größte Gefälle?

Aufgabe 3: Spielrunde

Eine Spielrunde besteht aus 9 Personen. Jede dieser Personen kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % zu den wöchentlichen Treffen. Aus Erfahrung weiß man, dass das Treffen mehr als zwei Stunden dauert, wenn mindestens zwei Drittel der Personen anwesend sind. Unter den 9 Personen sind vier etwas streitlustiger. Wenn zwei dieser streitlustigeren Personen anwesend sind, kommt es beim Treffen mit Sicherheit zum Streit.

a) Wie viele Personen kann man durchschnittlich bei einem Treffen erwarten?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Treffen mehr als zwei Stunden dauert?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem Streit kommt?

Aufgabe 4: Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung.

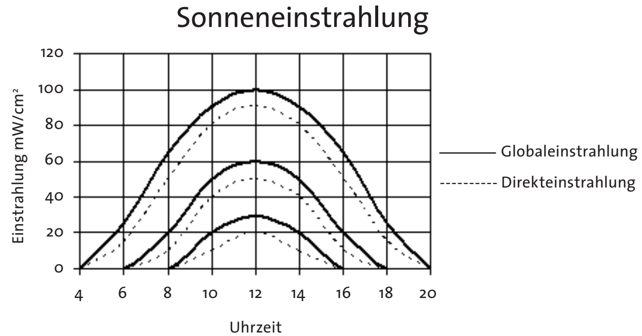
N1 N2 N3 N4

In den Graphen N1, N2, N3, N4 entsprechen den blau markierten Flächen Wahrscheinlichkeiten. Kreuze an, welche der unten stehenden Wahrscheinlichkeitsaussagen sie abbilden.

	N1	N2	N3	N4	keiner der Graphen
P(X ffi a)	☐	☐	☐	☐	☐
P(X ffl a)	☐	☐	☐	☐	☐
P(X ffi b)	☐	☐	☐	☐	☐
1 - P(X ffi a)	☐	☐	☐	☐	☐
1 - P(X ffi b)	☐	☐	☐	☐	☐
1 - P(μ - a ffi X ffi μ + a)	☐	☐	☐	☐	☐
P(a ffi X ffi b)	☐	☐	☐	☐	☐
P(a ffi X ffi b)	☐	☐	☐	☐	☐
P(a ffi X ffi b)	☐	☐	☐	☐	☐
P(X ffi b) - P(X ffi a)	☐	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 5: Photovoltaik

Das Diagramm gibt die aufgenommene Leistung einer Solarzelle pro cm^2 im Tagesverlauf an, wie sie theoretisch nach dem Sonnenlauf sein müsste.



Quelle für das Diagramm:
http://www.e-technik.fh-lausitz.de/~labormt1/pc-mt-2002/tzietz/Werte1.htm

Zum Vergleich der pro cm^2 Solarzelle aufgenommenen Energie (Globaleinstrahlung) während eines Tages (von 4.00 – 20.00 Uhr) über den Jahresverlauf (obere Kurve für den Sommer, mittlere Kurve für Frühling und Herbst, untere Kurve für den Winter) muss diese aus der obigen Zeichnung berechnet werden.

Prinzipiell berechnet sich die Energie aus der Formel: $W = \int_{t_1}^{t_2} P[t[dt$

Die dabei verwendeten Größen und Einheiten lauten wie folgt.

Zeit	T	[t] = 1 s (Sekunde)
Leistung	P	[P] = 1 W (Watt)
Energie	W	[W] = 1 J (Joule) = 1 Ws (Wattsekunde)

a) Stellen Sie die benötigten Funktionen als Wertetabelle mit der zur Lösung notwendigen Anzahl an geeigneten Werten und unter Verwendung passender Einheiten dar.
b) Berechnen Sie die aufgenommene Energie für den Sommer (Globaleinstrahlung).
c) Berechnen Sie die Energie der Streueinstrahlung
(Globaleinstrahlung = Direkteinstrahlung + Streueinstrahlung) .
d) Argumentieren Sie, woher Ungenauigkeiten in der Berechnung stammen können.

Da sich beim Reife- und Diplomprüfungsprojekt noch viele Aspekte bis zur Umsetzung 2013/14 und 2014/15 ergeben werden, werden hier keine weiteren Aufgaben angeführt.

D. Unterrichtsprojekte

Durch neue Herausforderungen im Bildungsbereich zeigt sich, dass Unterrichtsprojekte ein wichtiger Bestandteil innovativer Schulentwicklung und qualitätsvollen Unterrichts einer Schule sind. Die Lehrpläne eröffnen Freiräume und Möglichkeiten für solche Unterrichtsprojekte und fordern explizit die Durchführung solcher (fächerübergreifender) (Unterrichts-)Projekte (vgl. bmbwk, 2001) sodass die Förderung prozessorientierter Fertigkeiten und Fähigkeiten bei Schüler/innen stattfindet.

Die Arbeit an einem gemeinsamen Thema ermöglicht Teambildung, den Erwerb sozialer Kompetenz und die Entwicklung einer Teamkultur. Die ganzheitliche Ausrichtung durch den Einbezug von Projekten in den Unterricht fördert die Kreativität, konstruktive Problemlösung(en), das Organisations- und Präsentationsvermögen in gleicher Weise wie Eigenverantwortung für den persönlichen Lernprozess. Zudem bietet ein solcher Projektunterricht ein Übungsfeld für die Anforderungen des späteren Berufslebens. Besonders bedeutsam ist jedoch, dass die Arbeit an Projekten Schüler/innen ermöglicht wird, selbstständig neue Arbeitsmethoden und Funktionen innerhalb einer Gruppe erprobt, über Fächer- und/oder Schulgrenzen geblickt und gleichzeitig spielerisch und motiviert gelernt wird.

Österreichweit arbeiten Lehrer/innen an der Verbesserung ihres eigenen Unterrichts, indem innovative Unterrichtsprojekte durchgeführt werden. Inhaltlich, organisatorisch und auch finanziell werden sie im Rahmen des IMST-Projekts (Fonds, Themenprogramme) unterstützt. Dieses Projekt deckt mit seinen Themenprogrammen den Fächerkanon der Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Deutsch sowie verwandter naturwissenschaftlicher und technischer Fächer ab. Es blickt auf eine lange Geschichte zurück – seit 1999 gibt es bereits Bemühungen um die Etablierung einer Innovationskultur im österreichischen Bildungswesen.

Alle Projekte von IMST weisen jedenfalls einen unmittelbaren Bezug zu konkret stattfindendem Unterricht auf. Sie zeigen Wirkung sowohl auf Schüler/innen- als auch Lehrer/innen-Seite. Zudem haben sie Auswirkungen im lokalen Bereich (Diskussion und Verbreitung der Ergebnisse in der Fachgruppe oder an der Schule), in der Region (Verbreitung von Projektergebnissen im Bezirk oder im Bundesland) aber auch überregional (Österreich oder international). Alle im Laufe der (Schul-)Jahre im Rahmen der vom österreichischen Unterrichtsministerium unterstützten IMST-Initiative finanziell und ideell geförderten Projekte sind erprobte Beispiele für innovativen Unterricht, in denen verschiedene fachdidaktische Ansätze und Konzeptionen realisiert und verschiedene (neue) Lernformen erprobt wurden. Wichtig dabei ist, dass die Projekte und deren Ergebnisse von den Lehrer/innen reflektiert und evaluiert werden müssen und in Form von Berichten für Interessierte elektronisch (http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/index.php/Hauptseite, Stand: September 2011) zugänglich sind.

Die Ergebnisse der Evaluation(en) in IMST am Beispiel Mathematik in der AHS zeigen, dass Schüler/innen mehr Interesse als in PISA 2006 befragte Schüler/innen zeigen. (vgl. Krainer, 2009, S. 3) Darüber hinaus haben Schüler/innen, die einen solchen Unterricht erlebt haben, weniger Angst in den betroffenen Fächern. Auf der Ebene der Lehrer/innen hat die Evaluation gezeigt, dass sie eine signifikant höhere Motivation haben, sich beruflich (z.B. hinsichtlich ihrer Kompetenzen) weiterentwickeln zu wollen (vgl. Krainer und Posch 2010). Auf Ebene der regionalen Netzwerke konnte nachgewiesen werden, dass die Veranstaltungen den Teilnehmer/innen Impulse bieten, über den eigenen Unterricht nachzudenken und Neues auszuprobieren.

Übergeordnetes Ziel von IMST ist es, eine Innovationskultur im österreichischen Bildungswesen zu etablieren und strukturell zu verankern. Gemeint ist damit eine Kultur, in der alle Betroffenen gemeinsam an einer kontinuierlichen Qualitäts (weiter)entwicklung arbeiten.

Es sollen gemeinsame, an Inhalten und Qualitätskriterien orientierte Projekte umgesetzt werden, die auf vielen (bildungs-)relevanten Ebenen wirksam werden, vor allem aber auf der Schüler/innen- und Lehrer/innen-Ebene. So kann durch diese Bemühungen ein möglichst optimales Lernen der Schülerinnen und Schüler erreicht werden.

E. Kann Österreich bei PISA-Mathematik erfolgreicher werden?

Die PISA-Testergebnisse in Mathematik sind seit 2003 eher durchschnittlich ausgefallen. Zweifellos ist es im österreichischen Schulwesen, das sich vor dem „Testjahr“, der 9. Schulstufe, in viele unterschiedliche Schularten teilt, sehr viel schwieriger, eine einheitliche Linie für die Behandlung einer Mathematik zu finden als in Schulsystemen, in denen Schüler/innen bis einschließlich der 9. Schulstufe kontinuierlich lernen und im allgemeinbildenden Fachkanon eine gewisse Perfektion erlangen können. Zweifellos ist in vielen Ländern der Zugang zu standardisierten Tests sehr unterschiedlich ausgeprägt, in Österreich sind Erfahrungen bis dato kaum vorhanden – mit den Bildungsstandards kommen sie jetzt langsam in Schwung.

Alle, die es für wichtig halten, dass der Umgang mit „Mathematik“ an Österreichs Schulen positiv besetzt ist, sind aufgerufen, die fachdidaktische Seite der Entwicklungen zu beachten und Vorschläge für kurzfristige Maßnahmen in den nächsten 10 Monaten zu machen. Die Zielgruppe der 14- und 15-jährigen Schüler/innen garantiert, dass alle Schultypen in Österreich rund um den schwierigen Übergang von der 8. in die 9. Schulstufe betroffen sind. Daher müssen Initiativen an den Pflichtschulen genauso gesetzt werden wie an der AHS oder allen berufsbildenden Schulen.

Bei europäischen und internationalen Berufswettbewerben gibt es offizielle Trainings- und Vorbereitungsphasen – ein Modell, das für die PISA-Testungen nicht geläufig ist, in vielen Ländern aber angewandt wird. Dabei geht es natürlich nicht darum, die Testkohorten vorzubereiten (abgesehen davon, dass die Auswahl der Probanden per Zufall erfolgt), sondern einen positiv besetzten Mathematikunterricht zu pflegen und internationale Testformate den Schüler/innen in Österreichnäher zu bringen. Für unsere Schüler/innen in der Berufsbildung, die bei den Wettbewerben „Euroskills“ und „Worldskills“ mitmachen, war diese

Strategie „umfangreiches Training – beste Ergebnisse“ bisher äußerst erfolgreich!

Die nachfolgenden vier Ziele wären beim Umgang mit internationalen Tests aus Mathematik anzustreben:

1) Die internationalen Testformate in Mathematik müssen im laufenden Regelunterricht, besonders in der 8. und 9. Schulstufe, bekannt gemacht werden. Aus den begleitenden Fragebögen zu den PISA-Testungen wissen wir, dass die Motivation der Schüler/innen bei den Tests gute Ergebnisse zu erzielen, geringer ist als in anderen Ländern. Damit sind Nachteile bei den Ländervergleichen gegeben, die beseitigt oder zumindest gelindert werden sollen.

2) Es geht darum, die Prüfungskultur und Art der Aufgabenstellungen kennen zu lernen, die bei „internationalen Assessments“ wie PISA verwendet werden. Der Mehrwert mathematischer Überlegungen soll deutlich gemacht werden können. Die internationalen PISA – Beispiele sind praxisadäquat und „modern formuliert“ – auch wenn sie seit 2006 nicht mehr erneuert wurden! Daher ist es auch wichtig, selbst „Aufgaben“ – Generika“ zu schaffen, die österreichische Lehrende, durchaus unter Zuhilfenahme von vielen Erfahrungen mit den Bildungsstandards, in den Unterricht einbringen können.

3) Es geht um ein Klima der Ernsthaftigkeit und Leistungsfreude, das bei der Bewältigung von internationalen Testungen unterstützend wirkt!

4) Es geht aber offensichtlich auch darum, „blinde Flecken“ bei Lehrstoffbereichen in den 8. und 9. Schulstufen aufzuspüren, beispielsweise im Bereich der Datenanalyse, der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung - wo Österreichs Schüler/innen bisher deutlich schwächer abschnitten als Schüler/innen anderer Länder - und in dieser kurzen Zeit ins Unterrichtsgeschehen zu bringen. Lehrbücher und Lehrpläne dazu sind vorhanden, da geht es offensichtlich um eine ganz konkrete Umsetzung.

Die vorliegende Broschüre enthält Informationen zu PISA und freigegebene Aufgaben aus den vorangegangenen Jahren, in denen diese internationale Vergleichsstudie über Schüler/innen-Leistungen in Mathematik durchgeführt wurde. Im Rahmen dieser PISA-Studie werden nicht nur mathematische Kompetenzen österreichischer Schüler/innen überprüft, sondern auch Kompetenzen hinsichtlich des Lesens bzw. in den Naturwissenschaften. Diese Bereiche werden in dieser Broschüre allerdings nicht thematisiert.

Mit den PISA-Untersuchungen wurden ab Beginn des 21. Jahrhunderts erstmals umfangreiche textorientierte Aufgaben gestellt, die 15-jährige Schüler/innen lösen und über die sie auch reflektieren können.

Es lohnt sich daher, die Art und den Inhalt der zuletzt typischen Aufgabenstellungen überblicksartig durchzuarbeiten. Einerseits, um auf eine eventuelle Testung, für die Schulen und Klassen zufällig ausgewählt werden, vorbereitet zu sein, aber auch, um die Anforderungen von international anerkannten Beispielen in Mathematik kennen zu lernen.

Welche Unterstützung wird es dazu geben?

Für die Beschäftigung mit möglichen Aufgabenstellungen von mathematischen PISA- Beispielen wird es folgende Unterstützungsleistungen geben:

1) Die Umsetzung von „Erfolgreich bei PISA 2012“ auf dem **Portal** www.lms.at. Auf diesem Portal werden alle veröffentlichten Beispiele und solche aus Feldtestungen sein, die nutzbringend verwendet werden können. Das Subportal wird als „Opportunity-to-practice“ lau-

fend zur Verfügung stehen. Besonders wichtig wäre uns hier, selbst entwickelte „Generika – Aufgaben" einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

2) Mit der **Broschüre „Erfolgreich bei PISA 2012"** soll eine solide Grundlage für die Beschäftigung mit den internationalen Gegebenheiten geschaffen werden. Die Unterlage wird an Schulen verteilt und soll im Unterrichtsgeschehen in Mathematik besprochen werden.

3) Besonders freuen wir uns, eine **„Informationstour"** von Prof. Dr. Rudolf Taschner in alle Bundesländer ankündigen zu dürfen, wo er an den Mathematikinstituten der Universitäten, pädagogischen Hochschulen oder Fachhochschulen auf Institutsleiter oder deren Stellvertreter trifft und gemeinsam wesentliche Fragen des Umgangs mit der Mathematik und mit den internationalen Testformaten erörtert. Die Veranstaltungen sollen auch Diskussionen mit Wirtschaftstreibenden und Vertretern der Schulverwaltung ermöglichen. Durch die Veranstaltungen zwischen Mitte Oktober und Ende November 2011 soll auch ein Anreiz geschaffen werden, sich kurzfristig mit dem Thema in eigenen Unterricht zu beschäftigen. Zielgruppe der Veranstaltungen sind Lehrende der Mathematik und Vertreter/innen der Schulpartner.

4) Schließlich ist noch ein **Mathematiktag im Spätwinter 2012** geplant, bei dem zentral spannende Projekte der Mathematik „ausgestellt" werden sollen und nochmals auf die internationale Testung hingewiesen werden soll. Mit dem Aufgabenpool soll auch die Kommunikationskultur zwischen den betroffenen Institutionen verbessert werden. Auch moderne Kommunikationselemente wie „Facebook" sollen einbezogen werden.

Alle diese Unterstützungsmaßnahmen sollen dazu genützt werden, sich mit Aufgabenstellungen hinsichtlich heimischer Standards und internationaler Assessments kritisch auseinanderzusetzen – sowohl im jeweiligen Fachunterricht, in Supplierstunden, zu Übungszwecken, zu Hause und bei vielen anderen Gelegenheiten.

Ein gutes Abschneiden bei solchen internationalen Testungen und Leistungsvergleichen würde zeigen, dass sich das österreichische Schulsystem im internationalen Wettbewerb behaupten kann und es ermöglicht, (hoch-)qualifizierte junge Leute für die Wirtschaft und die Wissenschaft auszubilden, sodass langfristig der Wirtschaftsstandort Österreich international in einem sehr positiven Licht gesehen werden kann.

Kann Österreich bei PISA-Mathematikerfolgreicher werden?

F. Das PISA- Framework – Rahmenbedingungen für die Testungen

Das folgende „PISA – Framework“ ist nicht rasend neu (2003 ausformuliert), aber es sollte beim zweiten Durchgang der PISA - Hauptdomäne „Mathematik“ nochmals ausführlich dargestellt werden.

Zweck des Unternehmens PISA ist es, festzustellen, inwiefern unsere heranwachsenden Mitbürger(innen) über die Fähigkeit verfügen, „die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens“ einer „Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht“ (OECD, 1999, S. 2).

Aus der Definition wird deutlich, dass es bei der Mathematikkompetenz um die funktionelle Anwendung mathematischen Wissens in unterschiedlichen Situationen geht, z. B. um Probleme zu formulieren, mittels mathematischer Kalküle lösen zu können und das Ergebnis in weiterer Folge sinnhaft interpretieren zu können. Dies setzt grundlegendes Wissen über mathematische Terminologien, Fakten und Prozeduren voraus, also auch die Fähigkeit, bestimmte Operationen durchzuführen und adäquate Methoden anzuwenden.

Mathematische Kompetenz kann nach Definition der OECD (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung weltweit), die PISA ins Leben gerufen hat, also mit zwei wesentlichen Charakteristika identifiziert werden:

- Jugendliche erkennen und verstehen die Rolle, die die Mathematik in der Welt spielt.
- Jugendlichekönnen fundierte mathematische Urteile abgeben.
- Jugendlich können sich auf eine Weise mit Mathematik befassen, sodass sie als konstruktiver, engagierter und reflektierender Bürger auftreten und an der Gesellschaft teilhaben können.

Die PISA-Rahmenkonzeption unterscheidet für den Bereich Mathematik drei Aspekte, die für einen angemessenen Einsatz mathematischer Kompetenzen bei realistischen Alltagsproblemen von zentraler Bedeutung sind und in denen die Probleme angesiedelt sind: „Mathematische Inhalte", „mathematische Prozesse und Kompetenzen" sowie „Situationen und Kontexte".

Mathematische Inhalte

Dieser Teil ist in vier Subskalen unterteilt, welche als essenzielle Bestandteile der Mathematik gelten und in jedem Curriculum eine zentrale Stelle einnehmen:

- **Größen**
  Alle Arten von Quantifizierungen mit Zahlen, das Verständnis von Größen und das Erkennen von Zahlenmustern sowie numerische Phänomene und Muster werden hier erfasst.

- **Veränderung und Zusammenhänge**
  Mathematische Darstellungen von Veränderungsprozessen sowie unterschiedliche Arten funktionaler Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten sind in dieser Skala beheimatet.

- **Raum und Form**
  Alle Arten ebener oder räumlicher Konfigurationen, räumliche und geometrische Phänomene und Zusammenhänge sowie Gestalten und Muster werden hier erfasst.

- **„Unsicherheit"**
  Mathematische Phänomene und Situationen, die statistische Daten beinhalten und bei denen der Zufall eine Rolle spielt, d.h. Bereiche wie die Analyse und Darstellung von Daten sowie Wahrscheinlichkeiten und Schlussfolgerungen werden hier erfasst.

Diese vier „Subskalen" kommen seit PISA 2003 zum Einsatz. Sie sind nicht identisch mit den herkömmlichen Stoffgebieten Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik in österreichischen Lehrplänen. Es gibt trotzdem viele inhaltliche Beziehungen.

Eine Einschätzung: Österreichs Schüler/innen haben 2003 bis 2009 bei „Raum und Form" – Aufgaben sowie „Quantität" besonders gut und bei „Aufgaben zu „Unsicherheit" besonders schwach abgeschnitten. Aufgaben zu „Veränderung und Beziehungen" wurden im guten Durchschnitt bewältigt.

Mathematische Prozesse und Kompetenzen

Die Tests zur Erfassung der Mathematikkompetenz beinhalten wenige Aufgaben, deren Kontext rein innermathematisch ist und in denen der mathematische Inhalt offensichtlich, wie z. B. in vertrauten Aufgaben „Löse die Gleichung $2 \cdot x + 4 = 8$", wird. Relevant sind vor allem Aufgaben, bei denen jene Kompetenzen angesprochen werden, die es den Schüler/innen ermöglichen, reale Problemstellungen mit der Mathematik zu verknüpfen. Dieser Prozess der Mathematisierung erfordert einen gegebenen Sachverhalt nach mathematischen Konzepten zu organisieren und die mathematischen Inhalte zu identifizieren. Durch einen schrittweisen Formalisierungs- und Generalisierungsprozess erfolgt eine Reduzierung des Sachverhalts solange bis das Problem in seiner mathematischen Form vorliegt. Nachdem die Schüler/innen das Problem mit Hilfe der Mathematik gelöst haben, müssen sie diese Lösung in Bezug auf das reale Problem reflektieren, indem die Sinnhaftigkeit, das Ausmaß und die Grenzen der Lösung erkannt, das Ergebnis erläutert und das Modell gegebenenfalls kritisiert wird. Die notwendigen Kompetenzen – wie Schlussfolgern, Argumentieren, Kommunizieren, Modelle bilden, Probleme lösen und darstellen, formale, technische Sprache und Operationen anwenden – liegen unterschiedlichen Ausprägungen vor. Um diese zu klassifizieren, wurden drei aufeinander aufbauende

Kompetenz-Cluster gebildet, welche von zunehmender Komplexität gekennzeichnet sind:

1) Reproduktion-Cluster
d.h. Wiedergabe von Fakten und Routineverfahren – insbesondere wird auf den Rückgriff auf Fähigkeiten zum Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen, d.h. die Fähigkeit, die mathematische Sprache sinnvoll zu nutzen, in diesem Anforderungsniveau fokussiert. Das geht weit über das reine Beherrschen von Verfahren hinaus; es werden auch explizit Übersetzungsleistungen, d.h. einfache Modellierungen auf diesem Niveau mit einbezogen.

2) Beziehungs-Cluster
d.h. Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen - verschiedene Stoffgebiete und Teilbereiche der Mathematik sollen in Beziehung gesetzt und Informationen integriert werden, um einfache Probleme zu lösen.

3) Reflexions-Cluster
d.h. einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern– damit sind Aufgaben gemeint, in denen explizit eine Verallgemeinerung einer Situation, das Entwerfen einer umfassenden Strategie, die Einbettung einer gegebenen Situation in einen allgemeinen mathematischen Zusammenhang, erforderlich werden. Eine Bedingung an die Aufgabe um diesem Niveau zu genügen ist insbesondere dann erfüllt, wenn beim Modellieren auch explizit die Validierung des mathematischen Modells erwartet wird.

Diese definierten Cluster haben alle mit „Mathematisierung“ zu tun. Der darin enthaltene „Modellierungsprozess“ ist eine durchgehende Leitidee des internationalen PISA-Rahmenkonzepts.
Die Inhalte der PISA-Aufgaben orientieren sich an inner- und außermathematischen Kontexten, vor allem unter den letztgenannten an

authentischen und realitätsnahen Kontexten. In den PISA – Aufgaben wird nach Möglichkeit ein authentischer Kontext angesprochen: Eingekleidete Aufgaben werden eher vermieden. Die Aufgaben unterscheiden sich hinsichtlich der sogenannten „Distanz“ die sie zu den Schüler/innen aufweisen (sollen). Jede PISA – Fragestellung ist je einem der Kontexte aus dem persönlichem, bildungsbezogenen oder beruflichen, öffentlichen oder wissenschaftlichen Umfeld zugeordnet. Die Berücksichtigung von solchen Situationen soll helfen die Authentizität der Aufgaben zu sichern.

Kernkompetenzen

In der **PISA Rahmenkonzeption** (http://www.pisa.oecd.org) sind charakteristische Kompetenzen angeführt, die bei der Lösung von Aufgaben benötigt werden. Es sollen die Fähigkeiten

- mathematisch zu denken
- mathematisch zu argumentieren
- zur mathematischen Modellierung
- Probleme abzugrenzen und dann zu lösen
- mathematische Darstellungen zu nutzen
- mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematikumzugehen
- zu kommunizieren
- Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen

erfasst werden.
Um die in PISA ermittelten Kompetenzwerte inhaltsbezogen zu interpretieren, wird ein Stufenmodell mathematischer Kompetenzen mit sechs Kompetenzstufen herangezogen. Jede Kompetenzstufe zeichnet sich dabei durch bestimmte Anforderungen aus, die in der nachfolgenden Tabelle beschrieben werden. Diese inhaltlichen Beschreibungen der Kompetenzstufen stellen Bezugspunkte für eine Interpretation der Kompetenzwerte dar und bieten die Möglichkeit einer Bewertung der Ergebnisse, die über den numerischen vergleich hinausgehen.

Anforderungen auf den Kompetenzstufen in Mathematik

Stufe	Wozu die Schülerinnen und Schüler auf der jeweiligen Stufe im Allgemeinen in der Lage sein sollen
VI	Schüler/innen auf dieser Stufe können Informationen, die sie aus der Untersuchung und Modellierung komplexer Problemsituationen erhalten, konzeptmäßig ausarbeiten, verallgemeinern und auf neue Situationen anwenden. Sie können verschiedene Informationsquellen und Darstellungen miteinander verknüpfen und flexibel zwischen diesen hin und her wechseln. Sie besitzen die Fähigkeit zu anspruchsvollem mathematischem Denken und Argumentieren. Sie können dieses mathematische Verständnis und ihre Beherrschung symbolischer und formaler mathematischer Operationen und Beziehungen nutzen, um Ansätze und Strategien zum Umgang mit neuartigen Problemsituationen zu entwickeln. Schüler/innen auf dieser Stufe können ihr Tun und ihre Überlegungen, die zu ihren Erkenntnissen, Interpretationen und Argumentationen geführt haben, präzise beschreiben und kommunizieren.
V	Schüler/innen auf dieser Stufe können Modelle für komplexe Situationen konzipieren und mit ihnen arbeiten, einschränkende Bedingungen identifizieren und Annahmen spezifizieren. Sie können im Zusammenhang mit diesen Modellen geeignete Strategien für die Lösung komplexer Probleme auswählen, sie miteinander vergleichen und bewerten. Sie können strategisch vorgehen, indem sie sich auf breit gefächerte, gut entwickelte Denk-und Argumentationsfähigkeiten, passende Darstellungen, symbolische und formale Beschreibungen und für diese Situationen relevante Einsichten stützen. Sie sind imstande, über ihr Tun zu reflektieren und ihre Interpretationen und Überlegungen zu formulieren.
IV	Schüler/innen auf dieser Stufe können effektiv mit expliziten Modellen komplexer konkreter Situationen arbeiten, auch wenn sie einschränkende Bedingungen enthalten oder die Aufstellung von Annahmen erfordern. Sie können verschiedene Darstellungsformen, darunter auch symbolische, auswählen und zusammenführen, indem sie sie direkt zu Aspekten von Realsituationen in Beziehung setzen. Sie können in diesen Kontexten gut ausgebildete Fertigkeiten anwenden und mit einem gewissen mathematischen Verständnis flexibel argumentieren. Sie können Erklärungen und Begründungen für ihre Interpretationen, Argumentationen und Handlungen geben und sie anderen mitteilen.
III	Schüler/innen auf dieser Stufe können klar beschriebene Verfahren durchführen, auch solche, die sequenzielle Entscheidungen erfordern. Sie können einfache Problemlösungsstrategien auswählen und anwenden. Sie können Darstellungen interpretieren und nutzen, die aus verschiedenen Informationsquellen stammen, und hieraus unmittelbare Schlüsse ableiten. Sie können kurze Berichte zu ihren Interpretationen, Ergebnissen und Überlegungen geben.
II	Schüler/innen auf dieser Stufe können Situationen in Kontexten interpretieren und erkennen, die nicht mehr als direkte Schlussfolgerungen erfordern. Sie können relevante Informationen einer einzigen Quelle entnehmen und eine einzige Darstellungsform benutzen. Sie können elementare Algorithmen, Formeln, Verfahren oder Regeln anwenden. Sie sind zu direkten Schlussfolgerungen und wörtlichen Interpretationen der Ergebnisse imstande.

Das PISA- Framework – Rahmenbedingungen für die Testungen

I	Schüler/innen auf dieser Stufe können auf Fragen zu vertrauten Kontexten antworten, bei denen alle relevanten Informationen gegeben und die Fragen klar definiert sind. Sie können Informationen identifizieren und Routineverfahren gemäß direkten Instruktionen in expliziten Situationen anwenden. Sie können Handlungen ausführen, die klar ersichtlich sind und sich unmittelbar aus den jeweiligen Situationen ergeben.

G. Wie sieht das Aufgabenformat bei PISA-Aufgaben aus?

Die Leistungsmessung erfolgt bei PISA mittels „Paper & Pencil“ -Tests. Die einzelnen Aufgaben bei PISA, auch Items genannt, sind in Form von Units organisiert, die sich auf einen realitätsnah formuliert sind. Eine Unit stellt den inhaltlichen Rahmen für die einzelnen Aufgaben dar. Jede Unit beinhaltet einen oder mehrere Stimuli, d. h. einem sorgfältig beschriebenen mathematischen Problem, gefolgt von einer Aufgabe bzw. mehreren Aufgaben (Items).Die für den Haupttest ausgewählten Items bzw. Units werden je Kompetenzbereich zu Aufgabenblöcken, sog. Clustern, zusammengefasst. Pro Cluster ist eine Bearbeitungszeit von 30 Minuten vorgesehen ist. Für die Erstellung eines Testhefts werden dann jeweils vier verschiedene Cluster zusammengefasst. Somit beträgt die gesamte Testzeit pro Schüler/in zwei Stunden.

Die Cluster werden über die einzelnen Testhefte rotiert, so dass jeder Cluster in vier Testheften und jeweils an verschiedenen Stellen innerhalb der Testhefte vorkommt. Bei PISA 2009 gab es insgesamt 13 Testhefte. Im Anschluss an den sogenannten „Stimulus“ ist dann eine Mischung von Multiple-Choice-Aufgaben und Fragen vorhanden, für die die Schüler/innen selbstständig Antworten formulieren und / oder finden müssen.

Die mathematische Grundbildung im Rahmen von PISA soll mit einer Kombination aus Items mit Multiple-Choice-Formaten und Items mit offenem Antwortformat gemessen werden. Dabei gibt es unter Items mit offenem Antwortformat sowohl Aufgaben, für die es nur eine richtige Lösung gibt (offene Frage/eine richtige Antwort) sowie Fragen, die mehrere richtige Antwortmöglichkeiten erlauben (offene Frage/mehrere richtige Antworten). Man kann festhalten, dass ca. 25-35 % der Zeit der Testung in Mathematik auf offene Items mit mehreren richtigen Antworten entfallen sollen.

Ein typischer Cluster ist in etwa so aufgebaut: Eine kleine Anzahl (2-4) Multiple-Choice-Items oder offene Items mit einer einzigen richtigen Antwort zur Erfassung von Kompetenz 1 oder 2, eine kleine Anzahl (1-2) von Aufgaben mit jeweils 2 oder 3 Items innerhalb ein und desselben Kontexts zur Erfassung von Kompetenz 1 oder 2 und ein Block von mehreren Items innerhalb eines Kontexts, wobei die Items mit relativ einfachen Aufgaben zur Erfassung von Kompetenz 1 beginnen und dann zu komplexeren Aufgaben zur Erfassung von Kompetenz 3 übergehen.

Bei der Auswertung des PISA-Tests zu mehreren Items wird versucht, nicht nur korrekt / nicht korrekt zu unterscheiden, sondern durch die Erfassung von unterschiedlichen Lösungsstrategien zu genaueren Informationen zu kommen. Zudem ist geplant, auch weitere Aufgabenformate, z.B. tatsächliche Explorationen mathematischer Zusammenhänge, in Betracht zu ziehen.

Die Schüler/innen beantworten außerdem einen Fragebogen, der international vorgegebene Kontextinformationen wie den sozioökonomischen Hintergrund oder Einstellungen zur Hauptdomäne Lesen erfasst und darüber hinaus nationale Ergänzungsteile (z. B. einen Fragebogen zum Befinden in der Schule) enthält. Ebenso beantworten die Schulleiter/innen einen Fragebogen, mit dem Informationen zur Schule (z. B. Schulressourcen, Struktur und Organisation der Schule) erhoben werden.

Aufgabenformat

In den Testheften werden verschiedene Item-Formate verwendet, die es ermöglichen, die unterschiedliche Ausprägung der Fähigkeiten der Schüler/innen zu erfassen. Bei einigen Aufgaben müssen einfache Antworten ausgewählt oder wiedergegeben werden, die mit einer richtigen Antwort direkt verglichen werden können. Andere Aufgabenformate erfordern die Entwicklung und Formulierung einer eigenständigen Antwort, sodass komplexere Messungen hinsichtlich der Schülerleistung möglich sind.

In der Mathematik kommen zur Beantwortung der Aufgaben drei Antwortformate zum Einsatz – das **geschlossenes Format**, **das Multiple-Choice-Format** und ein **offenes Antwortformat**.

Das geschlossene Antwortformat entspricht dem im österreichischen Mathematikunterricht am häufigsten verwendeten Antwortformat.

Offene Antworten (Interpretationen, Begründungen, Beschreibungen) sind sehr wertvoll, obwohl sie im traditionellen Mathematikunterricht insbesondere bei schriftlichen Leistungsfeststellungen eher selten verlangt werden.

Der Einsatz der angeführten Multiple-Choice-Aufgaben ist (leider) im Mathematikunterricht für österreichische Schüler/innen noch eher unüblich. Zudem sind österreichische Schüler/innen kaum an standardisierte Tests gewöhnt. Dies könnte zusätzliche, über die Mathematikhinaus weisende Schwierigkeiten bereiten, zumindest eine gewisse Irritation auslösen. Die Antwortformate lassen sich durch folgende Tabelle darstellen:

Aufgabenformat	Antworttyp
Multiple-Choice Aufgaben	nur eine korrekte Antwortmöglichkeit
Komplexe Multiple-Choice Aufgaben	Serie von richtig / falsch bzw. Ja / Nein Antworten
Geschlossene Aufgaben	kurze verbale bzw. numerische Antwort, die teilweise dem Stimulus entnommen werden kann
Kurze offene Aufgaben	kurze selbstkonstruierte verbale bzw. numerische Antwort
Lange offene Aufgaben	längere selbstkonstruierte verbale Antwort

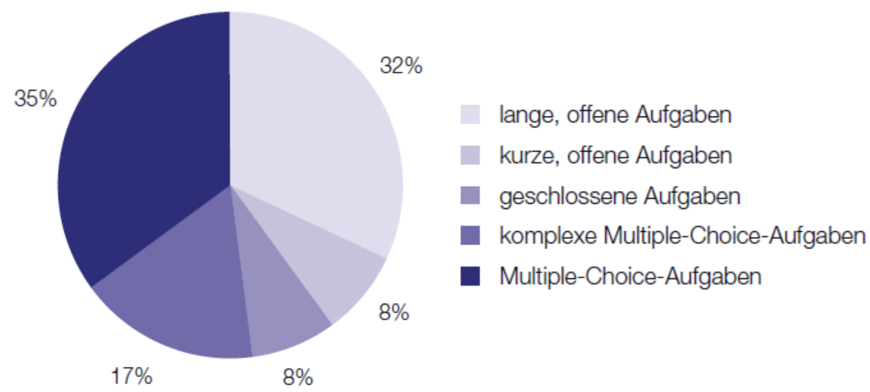
Multiple-Choice-Aufgaben
Es muss aus 4–5 vorgegebenen Antwortalternativen die richtige ausgewählt werden. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind für die Erhebung von Prozessen geeignet, die unter anderem das Erfassen bzw. Selektieren von Information betreffen. Hinsichtlich der Bewertung sind diese Items sehr einfach zu handhaben, da die richtige Antwort bereits vorliegt. Die komplexen Multiple-Choice-Items stellen eine erweiterte Form der Multiple-Choice-Fragen dar, bei denen aus einer Serie von Ja/Nein- oder Richtig/Falsch-Antworten die jeweils richtige ausgewählt werden muss.

Geschlossene Aufgaben
Mit Hilfe dieses Formats können umfangreichere Prozesse erfasst werden. Die Schüler/innen müssen eine Antwort notieren, die meist aus einem Wort oder einer Zahl besteht, die einem Text oder einer Tabelle entnommen werden kann. Im Unterschied zum Antwortformat der Multiple-Choice-Items, ist Raten weniger leicht möglich. Antworten können hier leicht als richtig oder falsch beurteilt werden.

Offene Aufgaben
Schüler/innen müssen selbst eine Antwort entwickeln. Dabei wird zwischen zwei – in der Länge unterschiedlichen – Antwortmöglichkeiten unterschieden. In der kurzen Version muss ein numerisches Ergebnis, ein richtiger Namen oder die Klassifikation für eine Gruppe von Objekten dargestellt oder erläutert werden. Bei langen Antworten muss auch der Lösungsweg vollständig beschrieben oder begründet werden. Dadurch erfasst man, welche Ergebnisse Schüler/innen auf Basis ihres eigenen Verständnisses zu einer Aufgabe wiedergeben können.

Verteilung der Aufgaben bei PISA 2009
Die prozentuelle Verteilung der Aufgabenformate hinsichtlich ihrer entsprechenden Ausprägung im PISA-Test 2009(welcher nicht mathematisch-spezifisch ausgerichtet war) kann nachfolgender Abbildung entnommen werden (vgl. Schwantner & Schreiner, 2009):

Wie sieht das Aufgabenformat bei PISA-Aufgaben aus?



Von den 191 getesteten Aufgaben des Haupttests erforderten 40 % eine Antwort durch die Schüler/innen (kurzes bzw. langes offenes Antwortformat). In etwas mehr als der Hälfte der Aufgaben mussten die Schüler/innen aus mehreren vorgegebenen Antwortalternativen eine auswählen (Multiple-Choice oder komplexe Multiple-Choice-Aufgabe). Die geschlossenen Aufgabenformate hatten einen Anteil von 8 %.

H. Die Aufgaben zur Mathematik bei den PISA-Haupttests

Zum Einstieg und um auf die Lösung von Aufgaben zum internationalen PISA-Assessment vorzubereiten, sind nachfolgend typische Aufgabenstellungen – aus den freigegebenen PISA-Aufgaben ab 2000 – zusammengefasst, an Hand derer die jeweiligen Kompetenzstufen erkannt werden können. Die Zusammenstellung hinsichtlich der Inhalte erfolgt ohne eine bewusste Auswahl. Auf der Webseite des bifie – unter http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf - findet sich eine vollständige elektronische Sammlung aller bisher veröffentlichten PISA-Mathematik-Aufgaben. Nachfolgendes Inhaltsverzeichnis soll die jeweiligen Aufgabenstellungen stellvertretend für die hier angeführten Aufgaben charakterisieren und zitieren:

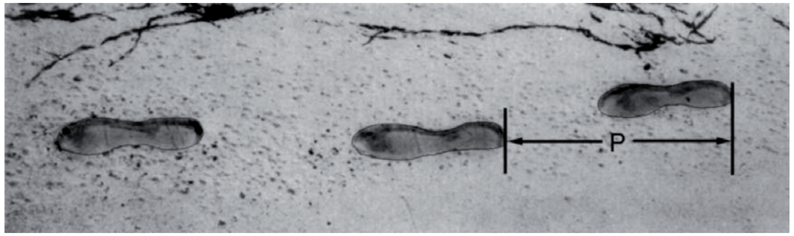
M037: Bauernhäuser 3
M124: Gehen 5
M136: Äpfel 8
M145: Würfel 13
M148: Fläche eines Kontinents 15
M150: Grösser werden 19
M159: Geschwindigkeit eines Rennwagens 23
M161: Dreiecke 26
M179: Raubüberfälle 28
M266: Tischler 30
M402: Internet Chat 32
M413: Wechselkurs 34
M438: Exporte 36
M467: Bunte Zuckerl 38
M468: Physiktests 39
M484: Bücherregale 40
M505: Müll 41
M509: Erdbeben 42
M510: Auswahl 43
M513: Testergebnisse 44
M520: Skateboard 46
M547: Treppe 50
M555: Spielwürfel 51
M702: Unterstützung für den Präsidenten 53
M704: Das beste Auto 54
M806: Stufenmuster 56

Exemplarische Beispielauswahl hinsichtlich der Charakterisierung nach dem Antwortformat

Nachfolgend sollen einige Beispiel vorgestellt werden und anschließend an den Stimulus entsprechend der getroffenen Charakterisierung (S. 15) Fragen zur Themenstellung vorgenommen werden, um darzustellen, wie diese im Unterricht umgesetzt werden können.

Stimulus Gehen (M 124)

M124: GEHEN



Das Bild zeigt die Fußabdrücke eines gehenden Mannes. Die Schrittlänge P entspricht dem Abstand zwischen den hintersten Punkten zweier aufeinanderfolgender Fußabdrücke.

Für Männer drückt die Formel $\frac{P}{n} = 140$ die ungefähre Beziehung zwischen n und P aus, wobei

n= Anzahl der Schritte pro Minute und

P= Schrittlänge in Meilen

Kurze, offene Aufgabenstellung

Frage 1: GEHEN M124Q01 - 0 1 2 9

Wenn die Formel auf Daniels Gangart zutrifft und er 70 Schritte pro Minute macht, wie viel beträgt dann seine Schrittlänge? Gib an, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

Die Aufgaben zur Mathematik bei den PISA-Haupttests

Frage 3: GEHEN M124Q03 - 00 11 21 22 23 24 31 99

Bernhard weiß, dass seine Schrittlänge 0,80 Meter beträgt. Die Formel trifft auf Barnhards Gangart zu.

Berechne Bernhards Gehgeschwindigkeit in Metern pro Minute und in Kilometern pro Stunde, Gib an, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

Stimulus Fläche eines Kontinents (M 148)

M148: FLÄCHE EINES KONTINENTS

Hier siehst du eine Karte der Antarktis

Lange, offene Aufgabenstellung

Frage 2: FLÄCHE EINES KONTINENTS M148Q02 - 01 02 11 12 13 14 21 22 23 24 25 99

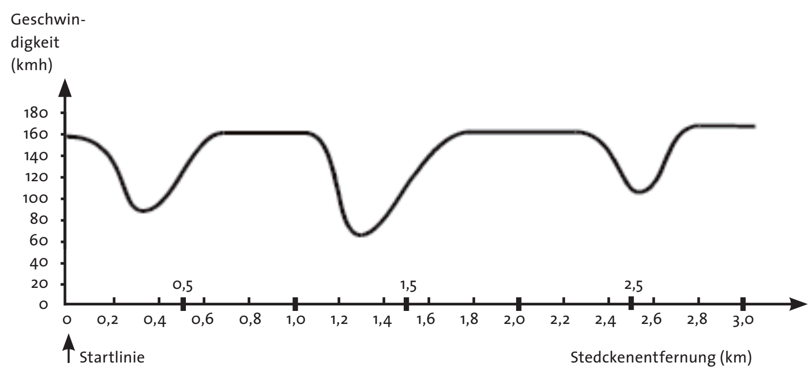
Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab auf der Karte benutzt.

Gib an, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Stimulus Geschwindigkeit eines Rennwagens (M 159)

M159: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGEN
Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen flachen Rennstrecke variiert.

Geschwindigkeit eines Rennwagens auf einer Strecke von 3 km (2. Runden)



Multiple-Choice Aufgabenstellung

Frage 1: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS M159Q01

Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geraden Abschnitts der Rennstrecke?

A 0,5 km
B 1,5 km
C 2,3 km
D 2,6 km

Frage 2: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS M159Q02

Wo wurde während der zweiten Runde die Geringste Geschwindigkeit aufgezeichnet?

A an der Startlinie
B bei etwa 0,8 km
C bei etwa 1,3 km
D nach der halben Runde

Frage 3: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS M159Q03

Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Makierungen von 2,6 km und 2,8 km sagen?

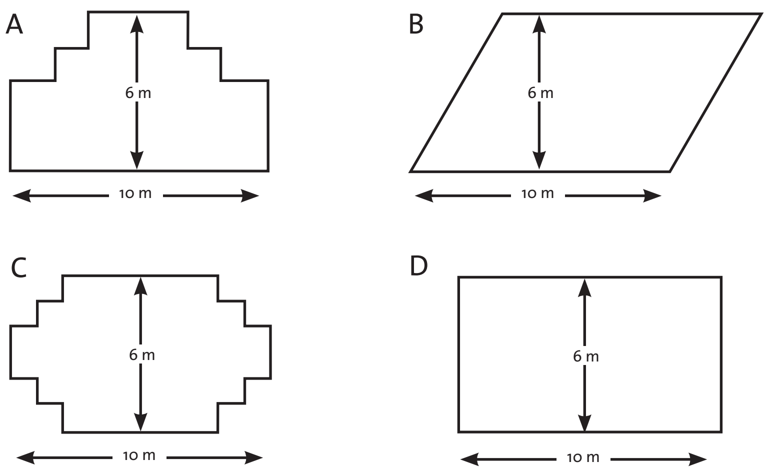
A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

Stimulus Tischler (M 266)

M159: TISCHLER

Frage 1: TISCHLER M266Q01

Ein Tischler hat 32 Laufmeter Holz und will damit ein Gartenbeet umranden. Er überlegt sich die folgenden Entwürfe für das Gartenbeet:



Kann jeder Entwurf mit 32 Laufmetern Holz hergestellt werden? Kreise entweder „Ja“ oder „Nein“ ein.

Gartenbeet-Entwurf	Mit diesem Entwurf: kann das Gartenbeet mit 32 Laufmetern Holz hergestellt werden?
Entwurf A	Ja / Nein
Entwurf B	Ja / Nein
Entwurf C	Ja / Nein
Entwurf D	Ja / Nein

Die Aufgaben zur Mathematik bei den PISA-Haupttests

Komplexe Multiple-Choice Aufgabenstellung

Kann jeder Entwurf mit 32 Laufmetern Holz hergestellt werden? Kreise entweder „Ja“ oder „Nein“ ein.

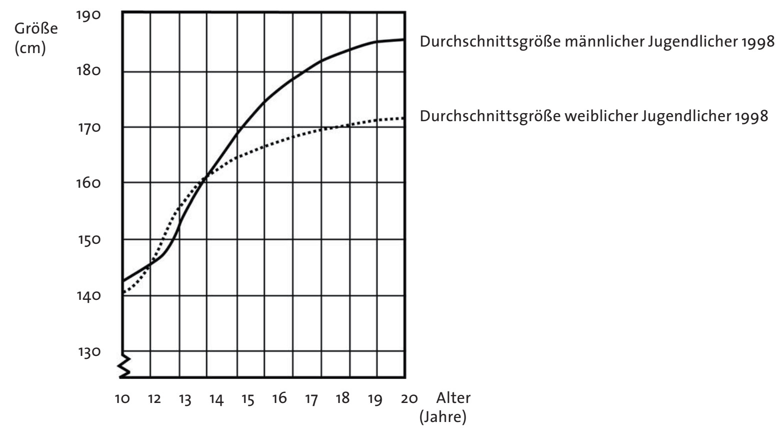
Gartenbeet-Entwurf	Mit diesem Entwurf: kann das Gartenbeet mit 32 Laufmetern Holz hergestellt werden?
Entwurf A	Ja / Nein
Entwurf B	Ja / Nein
Entwurf C	Ja / Nein
Entwurf D	Ja / Nein

Stimulus Grösser werden (M 150)

M150: GRÖSSER WERDEN

JUGENDLICHE WERDEN GRÖSSER

Für 1998 ist die durchschnittliche Körpergröße sowohl männlicher als auch weiblicher Jugendlicher in den Niederlanden in folgendem Graphen dargestellt.



Geschlossene Aufgabenstellung

Frage 1: GRÖSSER WERDEN M150Q01 - 019

Seit 1980 hat die Durchschnittsgröße 20-jähriger Frauen um 2,3 cm auf 170,6 cm zugenommen. Was war die durchschittliche Größe einer 20-jährigen Frau im Jahr 1980.

Antwort: ....cm

Lange, offene Aufgabenstellung

Frage 3: GRÖSSER WERDEN M150Q03 - 01 02 11 12 13 99

Erkläre anhand des Graphen, dass im Durchschnitt die Wachstumsrate für Mädchen über 12 Jahre abnimmt.

....

....

....

Exemplarische Beispielauswahl

Nun werden noch einige weitere Beispiel vorgestellt da diese weitere wichtige „Botschaften" hinsichtlich möglicher Inhalte transportieren. Das sind zum einen bezüglich des Inhalts „Größen" die Aufgaben Wechselkurs und Skateboard, zum anderen bezüglich der inhaltlichen Ausrichtung hinsichtlich Datenanalyse und Statistik die Beispiel Bunte Zuckerl und Unterstützung für den Präsidenten.

Stimulus Wechselkurs (M 413)

M413: WECHSELKURS

Mei-Ling aus Singapu wollte für 3 Monate als Austauschstudentin nach Südafrika gehen. Sie musste einige Singapur Dollar (SGD) in Südafrikanische Rand (ZAR) wechseln.

Fragen zu diesem Stimulus

Frage 1: WECHSELKURS M413Q01 - 0 1 9

Mei-Ling fand folgenden Wechselkurs zwischen Singapur Dollar und Südafrikanischen Rand heraus

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling welchselt zu diesem Wechselkurs 3000 Singapur Dollar in Südafrikanische Rand.
Wie viele Südafrikanische Rand hat Mei-Ling erhalten?

Frage 2: WECHSELKURS M413Q02 - 0 1 9

Bei ihrer Rückkehr nach Singapur 3 Monate später hatte Mei-Ling 3900 ZAR übrig. Sie wechselte diese in Singapur Dollar zurück, wobei sie bemerkte, dass sich der Wechselkurs geändert hatte:

1 SGD = 4,0 ZAR

Wie viele Singapur Dollar hat Mei-Ling erhalten?

Antwort: ....

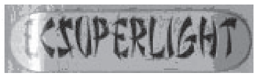
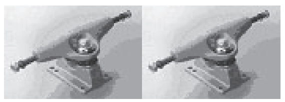
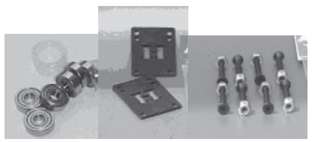
Stimulus Skateboard (M 520)

M520: SKATEBOARD

Erich ist ein großer Skateboard-Fan. Er besucht einGeschäft namens SKATERS, um einige Preise zu erkunden.

In diesem Geschäft kann man ein komplettes Skateboard kaufen. Oder man kann das Brett, einen Satz von 4 Rädern, einen Satz von 2 Achsen und einen Satz Kleinteile kaufen und sein eigenes Skateboard zusammenstellen.

Die Preise für die Produkte des Geschäfts sind:

Produkt	Preise in Zeds	
Komplettes Skateboard	82 oder 84	
Brett	40, 60 oder 65	
Ein Satz von 4 Rädern	14 oder 36	
Ein Satz von 2 Achsen	16	
Ein Satz Kleinteile (Kugellager, Gummiauflagen, Schrauben und Muttern)	10 oder 20	

Fragen zu diesem Stimulus

Frage 1: SKATEBOARD

M520Q01a
M520Q01b

Erich möchte sein eigenes Skateboard zusammenstellen. Was ist der niedrigste Preis und was ist der höchste Preis für selbst zusammengestellte Sakteboards in diesem Geschäft?

(a) Niedrigste Preis: ....Zeds.

(b) Höchster Preis: ....Zeds.

Frage 2: SKATEBOARD

M520Q02

Das Geschäft bietet drei verschiedene Bretter, zwei verschiedene Sätze Räder und zwei verschiedene Sätze Kleinteile an. Es gibt nur eine Möglichkeit für den Satz von Achsen.

Wie viele verschiedene Skateboards kann Erich zusammenbauen?

A 6   C 10
B 8   D 12

Frage 3: SKATEBOARD

M520Q03

Erich hat 120 Zeds zur Verfügung und möchte das teuerste Skateboard, das er sich leisten kann, kaufen.

Wie viel Geld kann sich Erich erlauben, für jeden der vier Teile auszugeben? Schreib deine Antwort in die folgende Tabelle.

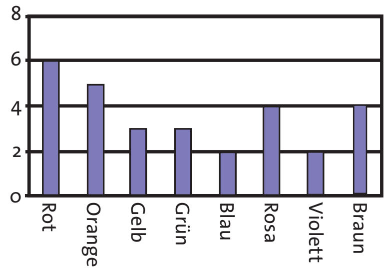
Teil	**Betrag (Zeds)**
Brett	
Räder	
Achsen	
Kleinteile	

Stimulus Bunte Zuckerl (M 467)

M467: BUNTE ZUCKERL

Frage 1: BUNTE ZUCKERL M467Q01

Roberts Mutter lässt ihn ein Zuckerl aus einem Sackerl nehmen. Er kann die Zuckerl nicht sehen. Die Anzahl der Zuckerl jeder Farbe in dem Sackerl wird in der folgenden Grafik dargestellt.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Robert ein rotes Zuckerl erwischt?

A	10 %	C	25 %
B	20 %	D	50%

Stimulus Unterstützung für den Präsidenten (M)

M702: UNTERSTÜTZUNG FÜR DEN PRÄSIDENTEN

Frage 1: INTERSTÜTZUNG FÜR DEN PRÄSIDENTEN M702Q01 - 0 1 2 9

In Zedland wurden Meinungsumfragen durchgeführt, um die Unterstützung für den Präsidenten bei der kommenden Wahl herauszufinden. Vier Zeitungsherausgeber machten seperate landesweite Umfragen. Die Ergebnisse der Umfrage durch die vier Zeitungen werden unten angegeben:

Zeitung 1: 36,5 % (Umfrage durchgeführt am 6. Jänner, bei einer Stichprobe von 500 zufällig ausgewählten Stimmberechtigten)

Zeitung 2: 41,0% (Umfrage durchgeführt am 20. Jänner, bei einer Stichprobe von 500 zufällig ausgewählten Stimmberechtigten)

Zeitung 3: 39,0% (Umfrage durchgeführt am 20. Jänner, bei einer Stichprobe von 1.000 zufällig ausgewählten Stimmberechtigten)

Zeitung 4: 44,5% (Umfrage durchgeführt am 20. Jänner, bei einer Stichprobe von 1.000 Lesern, die angerufen habe, um zu sagen, wen sie wählen werden)

Das Ergebnis welcher Zeitung ist am ehesten geeignet, um die Unterstützung für den Präsidenten vorauszusagen, wenn die Wahl am 25. Jänner stattfindet? Gib zwei Gründe an, die deine Antwort unterstützen.

I. Informationen über die Durchführung

Das BIFIE, insbesondere das BIFIE - Salzburg mit dem Zentrum für Bildungsmonitoring und Bildungsstandards, ist der österreichische Vertragspartnerund national für die wissenschaftliche Konzeption und Realisierung verantwortlich. Als nationale Projektmanagerin für PISA 2012 zeichnet sich Mag.a Ursula Schwantner verantwortlich. Die Studie wird von BM Claudia Schmied in Auftrag gegeben und vom BMUKK finanziert. Für BM Schmied ist diese Studie ein wichtiger Bestandteil in der österreichischen Bildungslandschaft wie nachfolgendes Zitat auch zeigt:

„PISA ist ernst zu nehmen. Österreich schöpft das Begabungs- und Leistungspotential der Schüler/innen bei weitem nicht aus. Die PISA – Ergebnisse zeigen einmal mehr die Umsetzung von begonnenen Reformen im Bildungswesen. Länder wie Finnland sind der Beweis dafür, dass sich der Einsatz lohnt. Wir müssen bedenken, dass es einen gewisse Zeit dauert, bis Reformen wirken und Ergebnisse sichtbar werden“

Bei PISA 2012 wird die Mathematikkompetenz schwerpunktmäßig erfasst. Darüber hinaus wird bei PISA 2012 – wie bereits bei PISA 2003 – die fächerübergreifende Problemlösekompetenz der Jugendlichen erfasst. Eine wesentliche Neuerung besteht darin, dass der Problemlösetest am Computer durchgeführt wird. Im Feldtest zu PISA 2012 werden die neu entwickelten Problemlöseaufgaben sowie die technische Umsetzung an den Computern erprobt.
Zielgruppe beim Test zu PISA 2012 sind Schüler/innen des Geburtsjahrgangs 1995. In Österreich wird eine Zufallsstichprobe Schüler/innen aus unterschiedlichen Schulen aller Schulsparten gezogen. Die PISA-Schüler/innen besuchen folgende Schulsparten:

- Allgemeinbildende Pflichtschulen – APS (Hauptschulen, Polytechnische Schulen, Sonderschulen*)

- Allgemeinbildende höhere Schulen – AHS (Gymnasium, RG, ORG, Schulen mit eigenem Statut)
- Berufsbildende mittlere Schulen – BMS (Fachschulen, Handelsschulen etc.)
- Berufsbildende höhere Schulen – BHS (HTL, HAK, HBLA etc.)
- Berufsbildende Pflichtschulen (Berufsschulen)
- Anstalten der Lehrer- und Erzieherbildung (BA für Kindergarten- und Sozialpädagogik)

Die Vorbereitung und Durchführung des PISA-Tests wurde auf eine möglichst geringe Belastung für die Schulen hin konzipiert. Als Kontaktperson zwischen der Schule und dem BIFIE ernennt jede Schule eine/n Schulkoordinator/in. Der Test wird von externen Testleiterinnen und Testleitern durchgeführt, der Testtermin wird zwischen Testleiter/in und Schulkoordinator/in vereinbart. Am vereinbarten Testtag kommt der/die externe Testleiter/in mit allen Materialien an die Schule und führt die Erhebung durch. Diese besteht aus drei Teilen: dem herkömmlichen PISA-Test (2 Stunden), einem Schülerfragebogen (max. 60 Minuten) und einem Problemlösetest am Computer (40 Minuten Testzeit plus ca. 15 Minuten Instruktions- und Übungsphase).

In jeder Schule nimmt auch eine genau definierte Anzahl von Schüler/innen am Problemlösetest teil, für die anderen Schüler/innen endet der PISA-Test nach der Bearbeitung der Fragebögen. Am Schluss nimmt der/die Testleiter/in alle Materialien wieder mit.

Die Haupterhebung zur PISA-Testung 2012 wird jedenfalls im Frühjahr 2012 stattfinden!

Die Testung selbst wird personenbezogen erfolgen, d. h. das BIFIE erhält keine Namen der teilnehmenden Schüler/innen. Somit sind die Vorgaben des Datenschutzgesetzes 2000 sowie jene der OECD erfüllt.

J. Anhang: Lösungs- und Korrekturvorschläge zu den Beispielen im Text

I. Bildungsstandards 4. Schulstufe (Aufgaben siehe Seite 14)

1: „4“; 2: „16“; 3: 700 – 400/2 = 500 €;
4: Es bleibt immer Rest „1“ (7:3 = 2, R 1; 10:3 = 3, R1; 16:3 = 5, R 1)
5: 84 * 10 = 840 : 2 = 420 (zuerst mit 10 multiplizieren und dann durch 2 dividieren!)
6: Bei a) und e) ist die Division richtig!

II. Bildungsstandards 8. Schulstufe (Aufgaben siehe Seite 15):

1: „6“; 2: „3000“; 3: „16 km“; 4: c + a = d - a; 5: „8 Buben“.

III. Aufgaben zur Reife- bzw. Reife- und Diplomprüfung (Aufgaben siehe Seite 18)

Aufgabe1 - Stromrechnung:
a) 3 + 1.020 > 0,083399 = 88,867
Familie Kraner bezahlt € 88,87.
b) P(x) = 3 + x > 0,083399 = 88,867
x .... verbrauchte kWh, P(x) .... Preis in €
c) Ja, weil sich eine Funktionsgleichung der Form y = kxx +g angeben lässt, wobei k = 0,083399 und d = 3 ist.
d) Nein, weil doppelter Verbrauch bedeutet nicht doppelter Energiegesamtpreis.
e) Ja. Wird vom monatlich zu entrichtenden Grundpreis abgesehen, gilt: doppelter Verbrauch ergibt einen doppelt so hohen Energieverbrauchpreis.

Aufgabe 2 – Kinderrutsche:
a) $f'(x) = 0{,}36x^3 - 2{,}04x^2 + 3{,}2x - 2{,}01$
$f'(0) = -2{,}01$, $f'(3{,}5) = -0{,}36$

b) Die Steigung ist bei x = 0 kleiner, d.h. das Gefälle größer.

Das größte Gefälle (= Minimum der Steigung) ist an der Stelle x mit f'' (x) = 0.

$f(x) = 0{,}09x^4 - 0{,}68x^3 + 1{,}6x^2 - 2{,}01x + 2{,}66$
$f'(x) = 0{,}36x^3 - 2{,}04x^2 + 3{,}2x - 2{,}01$
$f''(x) = 1{,}08x^2 - 4{,}08x + 3{,}2$
$f'''(x) = 2{,}16x - 4{,}08$
$f''(x) = 0 \rightarrow 1{,}08x^2 - 4{,}08x + 3{,}2 = 0 \rightarrow$

$x_1 = \frac{10}{9} \approx 1{,}11,\quad f'''(x_1) = -1{,}68 < 0 \rightarrow$ Maximum (der Steigung)

$x_2 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67,\quad f'''(x_2) = 1{,}68 > 0 \rightarrow$ Minimum (der Steigung)

$f'(x_1) \approx -0{,}48$: x_1 ist die Stelle im Inneren des Intervalls mit dem geringsten Gefälle.

$f'(x_2) \approx -1{,}16$: x_2 ist die Stelle im Inneren des Intervalls mit dem größten Gefälle.

Vergleich mit den Randwerten des Intervalls: f' (0) = -2,01 und f' (3,5) -0,36 -->
Das größte Gefälle (d.h. kleinste Steigung) von -2,01 befindet sich am Anfang der Rutsche an der Stelle x = 0.

Aufgabe 3 - Spielrunde :

a) $E = n \cdot p = 9 \cdot 0{,}75 = 6{,}75$ Man kann mit 6 bis 7 Personen rechnen.

b) Damit das Treffen mehr als zwei Stunden dauert, müssen mindestens 6 der 9 Personen anwesend sein: Binomialverteilung mit n = 9, p = 0,75

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$$
$$= \binom{9}{6} \cdot 0{,}75^6 \cdot 0{,}25^3 + \binom{9}{7} \cdot 0{,}75^7 \cdot 0{,}25^2 + \binom{9}{8} \cdot 0{,}75^8 \cdot 0{,}25 + 0{,}759 \approx$$
$$\approx 0{,}834 = 83{,}4\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Treffen mehr als zwei Stunden dauert, beträgt ca. 83,4%.

c) Zu einem Streit kommt es, wenn mindestens zwei der vier streitlustigeren Personen anwesend sind:
Binomialverteilung mit n = 4, p = 0,75

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - \left(0{,}25^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25^3\right) \approx 0{,}949 = 94{,}9\,\%$$

Aufgabe 4 - Normalverteilung:

	N1	N2	N3	N4	keiner der Graphen
$P(X \leq a)$	☐	☐	✗	☐	☐
$P(X \geq a)$	☐	☐	☐	☐	✗
$P(X \leq b)$	☐	☐	☐	☐	✗
$1 - P(X \leq a)$	☐	☐	☐	☐	✗
$1 - P(X \leq b)$	✗	☐	☐	☐	☐
$1 - P(\mu - a \leq X \leq \mu + a)$	☐	☐	☐	✗	☐
$P(a \leq X \leq b)$	☐	✗	☐	☐	☐
$2xP(X < \mu - a)$	☐	☐	☐	✗	☐
$2xP(X < b) - 1$	☐	☐	☐	☐	✗
$P(X \leq b) - P(X \leq a)$	☐	✗	☐	☐	☐

Kommentar zur Aufgabe 5 - Photovoltaik

Erforderlich ist die Verwendung von entsprechenden Einheiten. Es sind verschiedene Lösungsmethoden gleichermaßen zulässig (zB näherungsweise Berechnung mit nummerischer Integration oder auch über die Annäherung durch eine Polynomfunktion mit nachfolgender Integration).
Zur Diskussion der Genauigkeit kann z.B. durch Anzahl der zur Berechnung abgelesenen Punkte, der Ablesungsgenauigkeit aus der Zeichnung und der daraus resultierenden Rechnung erfolgen. Eine ausdrückliche Fehlerrechnung wird nicht erwartet.

III. PISA- freigegebene Aufgaben (siehe Seite 47):

1. GEHEN – Frage 1
Volle Punktezahl: 0,5 m oder 50 cm, 1/2; Berechnung 70/p = 140, p = 0,5; 70/140
Teilpunktezahl: korrektes Einsetzen in Formel, aber falsche oder keine Antwort z.B. 70/p = 140; 70=140p -> p=2 etc.
Keine Punkte: andere Antworten (etwas 70 cm).

1. GEHEN – Frage 3

Volle Punktezahl:	n= 140*0,80 = 112; pro Minute 112*0,80 = 89,6 m; die Geschwindigkeit beträgt 89,6 m/min oder 5,38 (= 5,4) km/h
Teilpunktezahl:	112 m/min oder 6,72 km/h (Multiplikation mit 0,8 vergessen) 89,6 m/min korrekt; Umwandeln in km/h falsch Wenn Zwischenrechnungen fehlen (z.B. nur 5,4 km/h vorhanden)
Keine Punkte:	andere Antworten.

2. FLÄCHE EINES KONTINENTS – Frage 2

Volle Punktezahl:	Schätzung durch Zeichnen eines Quadrats , Rechtecks oder Kreises zwischen 12 Mio km² und 18 Mio km² (keine Einheiten) Schätzung durch zusammengesetzte regelmäßige Figuren zwischen 12 und 18 Mio km²
Teilpunktezahl:	Schätzung durch Zeichnen eines Quadrats, Rechtecks oder Kreises mit Unter- oder Überschätzung; kein Maßstab verwendet Richtige Zeichnung, aber falsches Ergebnis.
Keine Punkte:	Umfang anstatt Fläche schätzen, andere falschen Antworten.

3. GESCHWINDIGKEIT eines Rennwagens – Frage 1:

Volle Punktezahl: B: 1,5 km; keine anderen Antworten!

3. GESCHWINDIGKEIT eines Rennwagens – Frage 2:

Volle Punktezahl: C: bei etwa 1,3 km; keine anderen Antworten!

3. GESCHWINDIGKEIT eines Rennwagens – Frage 3:

Volle Punktezahl: B: Die Geschwindigkeit des Autos nimmt zu; keine anderen Antworten!

4. TISCHLER – Frage 1

Volle Punktezahl:	Genau 4 richtige Antworten (A: ja, B: nein, C: ja, D: ja).
Teilpunktezahl:	Genau 3 richtige Antworten.
Keine Punkte:	2 oder weniger richtige Antworten.

5. GRÖSSER WERDEN – Frage 1

Volle Punktezahl: 168,3 cm (Einheiten vorgegeben); keine anderen Antworten!

5. GRÖSSER WERDEN – Frage 3

Volle Punktezahl:	Antwort muss sich auf die Veränderung der Steigung des Graphen für Mädchen beziehen. Z.B. „ab 12 Jahren wird die Kurve flacher“ oder „Kurve ist flacher nach 12“, „Steigung der Kurve wird ab 12 geringer“; Vergleich der tatsächlichen Größe.
Keine Punkte:	Keine Angaben zur Steigung oder zum Vergleich der Wachstumsrate des Graphen.

6. WECHSELKURS – Frage 1:

Volle Punktezahl: 12 600 ZAR; keine anderen Antworten zugelassen!

6. WECHSELKURS – Frage 2:

Volle Punktezahl: 975 SGD; keine anderen Antworten zugelassen!

6. WECHSELKURS – Frage 3:

Volle Punktezahl:	„Ja“ mit Erklärung (z.B.: „ja, weil jeder SGD um 0,2 ZAR billiger ist“ oder „Ja, 4,2 ZAR für einen Dollar hätten 929 ZAR ergeben“)
Keine Punkte:	„Ja“ ohne Erklärung oder andere Antworten.

7. SKATEBOARD – Frage 1:

Volle Punktezahl:	Der niedrigste (80) und der höchste Preis (173) sind beide richtig!
Teilpunkte:	Nur der niedrigste (80) oder der höchste (137) ist richtig!
Keine Punkte:	Andere Antworten.

7. SKATEBOARD – Frage 2:

Volle Punktezahl:	„D", 12 Bretter; keine anderen Antworten zugelassen.

7. SKATEBOARD – Frage3:

Volle Punktezahl:	65 Zeds für das Brett, 14 für die Räder, 16 für die Achsen, 20 für Kleinteile. Keine anderen Antworten zugelassen.

8. BUNTE ZUCKERL – Frage 1:

Volle Punktezahl:	„B" 20%; keine anderen Antworten zugelassen.

9. RAUBÜBERFÄLLE – Frage 1

Volle Punktezahl:	„Nein, nicht vernünftig – der ganze Graph müsste abgebildet sein oder „man müsste Graph von 0 bis 520 ansehen.."
Teilpunkte:	„Nein, von 508 auf 515 ist kein große Anstieg"
Keine Punkte:	„Nein" ohne Erklärung; „Ja – Höhe verdoppelt" u.a.

10. UNTERSTÜTZUNG FÜR DEN PRÄSIDENTEN – Frage 1:

Volle Punktezahl:	„Zeitung 3, weil sie mehr Stimmberechtigte zufällig ausgewählt hat" oder „Zeitung 3, weil sie 1000 zufällig ausgewählte Personen befragt hat und das Datum dem Wahldatum näher ist".
Teilpunkte:	„Zeitung 3, da Befragung dem Wahldatum näher"...
Keine Punkte:	„Zeitung 4", kein Hinweis auf zufällige Auswahl.

K. LITERATUR

Anderson, L. W.; Krathwohl, D. R. (2001): A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. New York: Longman

bm:bwk (2001): Rundschreiben Nr.44/2001 (verfügbar unter: http://archiv.bmbwk.gv.at/ ministerium/04/GZ_10.0775-14a2001_Grund5411.xml).

Buchberger, B. (1989): Should Students Learn Integration Rules? Technical Report. Linz: RISC.

Heugl H., 2001: Wozu Standards? – Wir haben doch Lehrpläne!, Thesenpapier, Wien.

Krainer, K. (2009): IMST: Ein- und Rückblicke. In Krainer, K. & Müller, R. (Hrsg.): IMST – Ein-, Rück- und Ausblicke. IMST-Newsletter, Nr. 32, S. 2–4.

Krainer, K., Posch, P. (2010). Intensivierung der Nachfrage nach Lehrerfortbildung - Vorschläge für Bildungspraxis und Bildungspolitik. In F. H. Müller, A. Eichenberger, M. Lüders & J. Mayr (Hrsg.), Lehrerinnen und Lehrer lernen - Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung (S. 479-495). Münster.

Klieme E., (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – eine Expertise, BMBF-Publ.

L.W. Anderson, D.R. Krathwohl (2001). A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives.

OECD (1999) Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assessment, Paris: OECD.

OECD (2003): PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD.

OECD (2006): Mathematik–Kompetenz Sammlung aller bei PISA freigegebenen Aufgaben der Haupttests 2000, 2003 und 2006. Salzburg: Projektzentrum für vergleichende Bildungsforschung.

Schwantner, U; Schreiner, C. (2009): PISA 2009 –Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Die Studie im Überblick. Wien: bmukk.

Weinert, F.E., (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F.E. (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. Weinheim und Basel S. 17-31.

Alle von der OECD – freigegebenen Beispiel finden Sie über die BIFIE – Homepage unter der Adresse www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf